

Simulare județeană - Examenul național de bacalaureat, decembrie 2025

Proba E.c)

Matematică M_mate-info

Barem de evaluare și de notare

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profil militar, specializarea matematică-informatică

Scoala in Papuci

SUBIECTUL I

(30 puncte)

5p	1. $100^{\frac{\lg 45}{2}} = (10^2)^{\frac{\lg 45}{2}} = 10^{\lg 45} = 45$ $2025^{\lg \sqrt{10}} = 2025^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2025} = 45$ $100^{\frac{\lg 45}{2}} - 2025^{\lg \sqrt{10}} = 45 - 45 = 0$	2p 3p
5p	2. $\Delta = (2m-1)^2 - 4m(m-1) = 1$ $V_m \left(-\frac{2m-1}{2m}; \frac{-1}{4m} \right)$ Dacă vârful V_m aparține primei bisectoare, atunci $-\frac{2m-1}{2m} = \frac{-1}{4m}, m \neq 0, m = \frac{3}{4}$	3p 2p
5p	3. $\sqrt[3]{x+1} - x = 1 \Leftrightarrow x+1 = (x+1)^3 \Leftrightarrow (x+1)[(x+1)^2 - 1] = 0$ $x+1=0$ sau $(x+1)^2 - 1 = 0$, cu soluțiile $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = -2$	3p 2p
5p	4. Numărul cazurilor posibile este $\text{card } F = 4^3 = 64$. Numărul cazurilor favorabile este numărul funcțiilor $f: A \rightarrow B$, injective: $A_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ $p = \frac{24}{64} = \frac{3}{8}$	3p 2p
5p	5. Fie M mijlocul laturii AB . $M \left(\frac{1+2}{2}, \frac{4+3}{2} \right), m_{GM} = \frac{4 - \frac{7}{2}}{2 - \frac{3}{2}} = 1$, Panta dreptei căutate d este $m_d = m_{GM} = 1, y - 3 = 1 \cdot (x - 2) \Leftrightarrow y = x + 1$	2p 3p
5p	6. $\sin \alpha + \cos \alpha = -1 \Rightarrow (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 \Leftrightarrow 1 + \sin 2\alpha = 1 \Leftrightarrow \sin 2\alpha = 0$ $\text{tg } 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = 0$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 puncte)

5p	1.a) $X(a, 2a) = aA - 2aI_2 = a(A - 2I_2) = a \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $(X(a, 2a))^2 = a^2 \cdot O_2 = O_2$	3p 2p
5p	b) $X(a, b) = A^{-1} \cdot A \Rightarrow A \cdot X(a, b) = I_2$ $A(aA - bI_2) = I_2 \Rightarrow aA^2 - bA = I_2 \Rightarrow$ $(4a - b)A - (4a + 1)I_2 = O_2 \Rightarrow (a, b) = \left(-\frac{1}{4}, -1\right)$	3p 2p
5p	c) Observăm că $A = X(1, 2) + 2I_2$ Cum $X(1, 2) \cdot 2I_2 = 2I_2 \cdot X(1, 2) \Rightarrow A^n = (2I_2 + X(1, 2))^n =$ $= C_n^0 (2I_2)^n (X(1, 2))^0 + C_n^1 (2I_2)^{n-1} (X(1, 2))^1 + C_n^2 (2I_2)^{n-2} (X(1, 2))^2 + \dots + C_n^n (2I_2)^0 (X(1, 2))^n =$ $\stackrel{a)}{=} 1 \cdot 2^n \cdot I_2 + n \cdot 2^{n-1} \cdot X(1, 2)$ $A^n = 2^n \cdot I_2 + n \cdot 2^{n-1} (A - 2I_2) \Rightarrow A^n = n \cdot 2^{n-1} A + 2^n (1 - n) I_2, \forall n \geq 1$	2p 3p
5p	2. a) Legea este bine definită dacă $\forall x, y \in [0; +\infty) \Rightarrow x \circ y \in [0; +\infty)$	

	$\forall x, y \in [0; +\infty) \Rightarrow 2^x, 2^y \in [1; +\infty)$	2p
	$2^x + 2^y - 1 \in [1; +\infty) \Rightarrow \log_2(2^x + 2^y - 1) \in [0; +\infty)$	3p
5p	b) Legea "o" este asociativă: $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z), \forall x, y, z \in [0; +\infty)$ $(x \circ y) \circ z = \log_2(2^x + 2^y - 1) \circ z = \log_2(2^{\log_2(2^x + 2^y - 1)} + 2^z - 1) = \log_2(2^x + 2^y - 1 + 2^z - 1)$ $x \circ (y \circ z) = x \circ \log_2(2^y + 2^z - 1) = \log_2(2^x + 2^{\log_2(2^y + 2^z - 1)} - 1) = \log_2(2^x + 2^y + 2^z - 1 - 1)$	2p 3p
5p	c) Din b) $\Rightarrow \underbrace{a \circ \dots \circ a}_{4 \text{ ori}} = 2a \Leftrightarrow \log_2\left(\underbrace{2^a + \dots + 2^a}_{4 \text{ ori}} - 3\right) = 2a$ $4 \cdot 2^a - 3 = 2^{2a} \Rightarrow 2^{2a} - 4 \cdot 2^a + 3 = 0$ $2^a \in \{1; 3\} \Rightarrow a \in \{0; \log_2 3\} \subset [0; +\infty)$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 puncte)

5p	1. a) $f'(x) = \left(\frac{(x-1)^2}{x+1}\right)' - (3\ln(x+1))' = \frac{((x-1)^2)'(x+1) - (x-1)^2(x+2)'}{(x+1)^2} - \frac{3}{x+1} =$ $= \frac{2(x-1)(x+1) - (x-1)^2}{(x+1)^2} - \frac{3}{x+1} = \frac{x^2 - x - 6}{(x+1)^2} = \frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)^2}$	2p 3p
5p	b) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(x-1)^2}{x+1} - 3\ln(x+1)\right) \xrightarrow{\infty - \infty} \lim_{x \rightarrow \infty} (x+1) \left(\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2} - \frac{3\ln(x+1)}{x+1}\right)$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2} = 1$, iar $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3\ln(x+1)}{x+1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x+1} = 0$ (L'H). Atunci $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$	3p 2p
5p	c) Determinăm Imf. $f'(x) = 0, x \in (-1, \infty) \Leftrightarrow x = 3$, iar $f'(x) < 0$, dacă $x \in (-1, 3)$ și $f'(x) > 0$, dacă $x \in (3, \infty)$. Atunci funcția f este strict descrescătoare pe $(-1, 3)$ și strict crescătoare pe $(3, \infty)$. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \infty, f(3) = 1 - 6\ln 2, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, iar funcția f este continuă pe $(-1, \infty)$ Atunci $Imf = [1 - 6\ln 2, \infty) \Rightarrow Imf \neq \mathbf{R}$, deci f nu este surjectivă și atunci nu este bijectivă.	2p 3p
5p	2. a) $f(x) = (x^2 - x)\sqrt{x-1}$ iar $f(x+1) = (x^2 + x)\sqrt{x}$ $\int f(x+1)dx = \int x^{\frac{5}{2}}dx + \int x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$	2p 3p
5p	b) $F'(x) = f(x), (\forall)x \in (-1, \infty)$ $(6x^2 + 12x + 2)\sqrt{x-1} + \frac{x^3 + 3x^2 + x - 5}{\sqrt{x-1}} = (ax^2 + bx + c)\sqrt{x-1}$ $7x^3 + 9x^2 - 9x - 7 = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c, (\forall)x \in (-1, \infty)$ Atunci prin identificarea coeficienților $a = 7, b = 16, c = 7$	2p 3p
5p	c) Fie funcția G, primitiva căutată. Cf. b funcția F este o primitivă a lui f, deci $G(x) = F(x) + c$ $A(2, t)$ este comun graficului funcției G și dreptei d cu ecuația $y = x + 10$, deci $t = G(2) = 2 + 10$. Atunci $34 + c = 12$, deci $c = -22$ Primitiva căutată este $G(x) = (2x^3 + 6x^2 + 2x - 10)\sqrt{x-1} - 22, G: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$	2p 3p

Scoala in Papuci